Journal of Quality Engineering and Management

www.pqprc.ir

J. Qual. Eng. Manag. Vol. 14, No. 2 (2024) 127–144.

Paper Type: Original Article

Realistic Economic-Statistical Design of $\bar{X}$ Control Chart Based on Lorenzen and Vance Model in the Presence of Independent Multiple Assignable Causes under the Burr-XII Shock Model

Farnoosh Shiravani[1], Mohammad Bamenimoghaddam[1,*], Reza Poortaheri[1]

[1] Department of statistics, Allameh Tabataba'i University, Tehran, Iran; f.shirvani@atu.ac.ir; bamenimoghadam@atu.ac.ir; pourtaheri@atu.ac.ir.

Citation:

Received: 15 July 2023 *Revised: 11 October 2023* *Accepted: 09 November 2023*	Shiravani., F., Bamenimoghaddam, M., & Poortaheri, R. (2024). Realistic economic-statistical design of $\bar{X}$ control chart based on lorenzen and vance model in the presence of independent multiple assignable causes under the burr-XII shock model. *Journal of Quality Engineering and Management , 14*(2), 127-144.

Abstract

Purpose: The main goal of this study is to propose a realistic and practical model for the economic-statistical design of $\bar{X}$ control charts in the presence of multiple independent assignable causes under the Burr Type XII shock model. The model aims to minimize the underestimation of the actual cost per unit time of the quality cycle.

Methodology: This research utilizes the Burr Type XII distribution as a shock model to develop the RED model for optimal design of $\bar{X}$ control charts. The Lorenz and Van cost function is also extended to account for multiple assignable causes, and a numerical example is provided to demonstrate the solution approach.

Findings: Numerical results reveal that the proposed model outperforms existing models in accurately estimating the real cost per unit time of the quality cycle. Furthermore, an increase in the shock probability leads to a non-decreasing trend in the average cost, emphasizing the importance of considering this probability in E(A) calculations.

Originality/Value: This is the first study to employ the Burr Type XII distribution as a shock model in the economic-statistical design of control charts. By extending existing cost models, the paper introduces a novel and realistic approach to designing control charts in the presence of multiple independent shocks.

Keywords: Realistic economic-statistical design, Control chart $\bar{X}$, Multiple assignable causes, Burr-XII shock model.

Corresponding Author: bamenimoghadam@atu.ac.ir

10.48313/jqem.2024.214758

Licensee System Analytics. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0).

مهندسی و مدیریت کیفیت

www.pqprc.ir

دوره ۱۴، شماره (۲)، (۱۴۰۳)، ۱۴۴-۱۲۷

نوع مقاله: پژوهشی

طراحی آماری-اقتصادی واقع‌بینانه نمودار کنترلی $\bar{X}$ بر اساس مدل لورنزن و ونس در حضور علت‌های اسنادپذیر چندگانه مستقل تحت مدل شوک بر ۱۲

فرنوش شیروانی[۱]، محمد بامنی مقدم[۱،*]، رضا پورطاهری[۱]

[۱]گروه آموزشی آمار، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران.

چکیده

هدف: هدف این مقاله ارایه یک مدل واقع‌گرایانه و کاربردی برای طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل $\bar{X}$ در حضور علت‌های اسنادپذیر چندگانه مستقل تحت مدل شوک بر ۱۲ است. این مدل با هدف کاهش خطای برآورد هزینه در واحد زمان چرخه کیفیت طراحی شده است.

روش‌شناسی پژوهش: در این پژوهش با استفاده از توزیع بر ۱۲ به‌عنوان مدل شوک، مدل *RED* برای طراحی بهینه نمودار کنترل $\bar{X}$ توسعه داده شده است. همچنین تابع هزینه لورنزن و ونس در حضور علت‌های اسنادپذیر چندگانه تعمیم یافته و با یک مثال عددی اعتبار روش پیشنهادی نشان داده شده است.

یافته‌ها: نتایج عددی نشان می‌دهد مدل پیشنهادی نسبت به مدل‌های پیشین، دقت بالاتری در برآورد هزینه واقعی در واحد زمان چرخه کیفیت دارد. همچنین افزایش احتمال وقوع شوک باعث افزایش هزینه متوسط می‌شود که ضرورت لحاظ کردن این احتمال در طراحی را برجسته می‌سازد.

اصالت/ارزش‌افزوده علمی: برای نخستین‌بار توزیع بر ۱۲ به‌عنوان مدل شوک در طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل معرفی شده است. مقاله با تعمیم مدل هزینه‌ای موجود، رویکردی نوین و واقع‌گرایانه برای طراحی نمودارهای کنترلی در حضور شوک‌های چندگانه ارایه می‌دهد.

کلیدواژه‌ها: طراحی آماری-اقتصادی واقع‌بینانه، نمودار کنترلی $\bar{X}$ ، علت‌های اسنادپذیر چندگانه، مدل شوک بر ۱۲.

۱- مقدمه

نمودار کنترلی، ارزشمندترین ابزار کنترل آماری فرآیند است که اولین بار توسط شوهارت [1] پایه‌گذاری شد. نمودار کنترلی شوهارتی $\bar{X}$ از پرکاربردترین و مهم‌ترین نمودارهای کنترلی تک‌متغیره برای پایش میانگین فرآیندهای تولیدی هستند. به‌طورمعمول برای پیاده‌سازی هر نمودار کنترلی نیاز به تعیین پارامترهای اندازه‌ی نمونه (n)، فاصله‌ی نمونه‌گیری (h) ضریب حدهای کنترلی (L) است. این پارامترها را پارامترهای طراحی یا طرح می‌گویند. هدف اصلی در طراحی نمودارهای کنترلی، تعیین بهینه پارامترهای طرح موردمطالعه است. تعیین پارامترهای تنظیمی بهینه در طراحی‌های اقتصادی و آماری-اقتصادی نمودارهای کنترلی، بیش از همه، به توزیع طول عمر فرآیند، یعنی توزیع مدت‌زمان تحت کنترل بودن آن تا رخداد علت یا علت‌های اسنادپذیر، بستگی دارد که از آن به‌عنوان مدل شوک یا سازوکار شکست فرآیند یاد می‌شود. تابع نرخ خطر یا تابع نرخ شکست به‌عنوان ابزاری برای تبیین تغییر در فرآیند درنظر گرفته می‌شود که در مبحث کنترل کیفیت از آن به نام مدل شوک یاد می‌شود. این تابع ممکن است تابعی

ثابت، افزایشی، کاهشی، گودالی شکل و غیره برحسب زمان (t) باشد. انتخاب یک توزیع مناسب به‌عنوان توزیع سازوکار شکست فرآیند در طراحی نمودار کنترلی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در ابتدا اغلب پژوهش‌گران از توزیع نمایی به‌عنوان توزیع سازوکار شکست فرآیند استفاده می‌کردند. این توزیع دارای نرخ خطر ثابت است. بررسی دقیق‌تر فرآیندها نشان داد که همیشه نرخ شکست ثابت نیست [2]. به‌طور مثال در فرآیندهای رو به‌زوال نرخ شکست افزایشی است. توزیع‌های گاما و وایبول به‌عنوان رایج‌ترین توزیع‌ها برای تحلیل سازوکار شکست یک فرآیند تولیدی رو به‌زوال به‌کار برده شده‌اند [3]، [4]. در توزیع بر ۱۲ می‌توان نرخ شکست را به‌صورت ثابت، افزایشی، کاهشی یا حتی وانی شکل (گودالی U – شکل) درنظر گرفت. از طرفی با تغییر پارامترهای توزیع بر ۱۲، می‌توان تقریب مناسبی برای توزیع وایبول، گاما، لگ–لوژستیک، نرمال و غیره به‌دست آورد. ازاین‌رو می‌توان گفت توزیع بر ۱۲ در برگیرنده توزیع‌های قبلی است و توزیعی جامع‌تر و کلی‌تر نسبت به توزیع وایبول است. از طرفی شکل ساده و بسته این توزیع باعث می‌شود در مسایل تحلیل بقا و قابلیت اعتماد کاربرد مناسبی پیدا کند [5]. بنا بر موارد ذکرشده، توزیع بر ۱۲ می‌تواند انتخاب مناسب‌تری به‌عنوان توزیع سازوکار شکست فرآیند باشد.

دانکن [6] برای اولین بار طراحی اقتصادی جامعی برای تعیین پارامترهای طراحی نمودار کنترلی $\overline{X}$ ارایه داد. او در مقاله خود فرض کرد که پارامتر میانگین فرآیند تحت تاثیر یک علت اسنادپذیر است که زمان وقوع آن از مدل شوک نمایی تبعیت می‌کرد. باکر [7]، هیکس و همکاران [8]، مونت‌گمری و هیکس [9] و مک‌ویلیامز [10] به بررسی اثر مدل شوک غیر نمایی در تعیین پارامترهای طراحی نمودار کنترلی و متوسط هزینه در واحد زمان پرداختند. بنرجی و رحیم [3] مدل اقتصادی دانکن [6] را تحت مدل شوک وایبول و نمونه‌گیری نایکنواخت توسعه دادند. چانگ [11] یک روش ساده‌تر برای تخمین پارامترهای طراحی بر پایه مدل اقتصادی دانکن [6] ارایه داد که ساده‌تر، دقیق‌تر و انعطاف‌پذیرتر از روش‌های قبلی بود. برای مرور جامعی از پژوهش‌های پیشین بر مبنای مدل اقتصادی دانکن [6] به مونت‌گمری [12]، هو و کیس [13] و وودال و مونت‌گمری [14] مراجعه شود. حیدری و همکاران [15] تحت مدل شوک بر ۱۲ به طراحی اقتصادی نمودار کنترل $\overline{X}$ پرداختند. پاشا و همکاران [16] نیز مدل اقتصادی دانکن [6] و بنرجی و رحیم [3] را تحت بازه‌های نمونه‌گیری یکنواخت و نایکنواخت با مدل شوک متعلق به خانواده توزیع‌های نرخ خطر متناسب توسعه دادند. وانگ و لی [17] نیز به طراحی اقتصادی نمودار کنترلی $\overline{X}$ با نمونه‌های همبسته تحت مدل شوک گاما و بازه‌های نمونه‌گیری نایکنواخت پرداختند.

در خصوص بررسی پیشینه حضور علت‌های اسنادپذیر چندگانه قابل‌ذکر است که دانکن [6] در بخش ۴ مقاله‌اش مدل هزینه خود را تحت مدل شوک نمایی، به چندین علت اسنادپذیر و فاصله نمونه‌گیری یکسان برای نمودارهای کنترلی $\overline{X}$ تعمیم داد. دانکن [18] دو مدل را برای بررسی علت‌های اسنادپذیر ارایه داد. در مدل اول به تشریح مدل هزینه قبلی خود تحت مدل شوک نمایی و در حضور چند علت اسنادپذیر و فاصله نمونه‌گیری یکسان برای نمودارهای کنترلی $\overline{X}$ پرداخت. او در مدل اول فرض می‌کند زمانی که علت اسنادپذیر ith رخ می‌دهد تا زمان کشف این علت اسنادپذیر، علت اسنادپذیر دیگری فرآیند را تحت تاثیر قرار نمی‌دهد. در مدل دوم، او فرض می‌کند که قبل از کشف علت اسنادپذیر اول، علت اسنادپذیر دیگری مجددا رخ می‌دهد و این دو علت اسنادپذیر به‌صورت هم‌زمان باعث تغییر در بردار میانگین فرآیند می‌شوند و تغییرهای ایجادشده توسط هر دو علت اسنادپذیر موردبررسی قرار می‌گیرد. لورنزن و ونس [19] طی مقاله‌ای مدل اقتصادی بر پایه مدل دانکن [6] مطرح کردند اما در آن به‌جای استفاده از معیارهای آماری مانند احتمال رخداد خطای نوع اول و دوم، از متوسط طول اجرا[1] استفاده شد. مدل اقتصادی لورنزن و ونس به گونه‌ای طراحی شده است که در آن امکان تصمیم‌گیری در مورد ادامه یا توقف فرآیند تولید به هنگام جست‌وجوی عامل علت اسنادپذیر و تعمیر فرآیند وجود دارد. پاشا و همکاران [20] مدل چن و یانگ [21] را تحت مدل شوک دلخواه متعلق به خانواده نرخ خطر متناسب در حضور m علت اسنادپذیر تعمیم دادند. شجاعی و همکاران [22] و نیز شجاعی و بامنی‌مقدم [23]، ابتدا به اصلاح پذیره‌های مدل دانکن [18] پرداختند و سپس مدل اقتصادی و آماری–اقتصادی واقع‌بینانه (RED) را ارایه دادند. در این مدل ابتدا برای اولین بار به بررسی احتمال وقوع پیشامد فقط یک علت

[1] Average Run Length (ARL)

اسنادپذیر تا صدور هشدار درست پرداخته و بر اساس آن مدل اقتصادی و آماری-اقتصادی واقع‌بینانه (RED و $RSED$) در حضور چند علت اسنادپذیر مستقل برای رفع نواقص و کاستی‌های مدل‌های پیشین ارایه شده است. نتایج حاصل از پیاده‌سازی مدل واقع‌بینانه در طراحی نشان داد که در پژوهش‌های پیشین، متوسط هزینه در واحد زمان چرخه کیفیت دارای اختلاف قابل‌توجهی با نتایج حاصل از این مدل است و بنابراین، نیاز به طراحی پژوهش‌های پیشین بر اساس مدل واقع‌بینانه است. در این پژوهش برای اولین بار به طراحی واقع‌بینانه اقتصادی و آماری-اقتصادی نمودار کنترلی شوهارتی $\bar{X}$ در حضور علت‌های اسنادپذیر چندگانه مستقل تحت مدل شوک بر ۱۲ خواهیم پرداخت.

ساختار این مقاله به این صورت است که در بخش ۲، تعاریف و فرض‌های ابتدایی برای طراحی نمودار کنترلی شوهارتی $\bar{X}$ ارایه می‌شود. در بخش ۳، طراحی اقتصادی واقع‌بینانه لورنزن و ونس برای نمودارهای کنترلی شوهارتی ارایه می‌شود. در بخش ۴، به تعیین مقدار بهینه‌ی پارامترهای طراحی در طراحی آماری-اقتصادی واقع‌بینانه نمودار کنترلی $\bar{X}$ پرداخته می‌شود. در نهایت، نتیجه‌گیری در بخش ۵ ارایه می‌شود.

۲- پذیره‌ها و نمادها

مفروضات مورداستفاده برای طراحی مدل اقتصادی و آماری-اقتصادی واقع‌بینانه $\bar{X}$ در بخش‌های بعدی عبارتند از:

۱. مشخصه کیفیت فرآیند از توزیع نرمال با میانگین μ معلوم و واریانس σ^2 (σ^2 در طول فرآیند ثابت است) معلوم تبعیت می‌کند. فرآیند تحت کنترل آماری است اگر $\mu = \mu_0$ باشد. وقتی علت اسنادپذیر ith رخ می‌دهد میانگین فرآیند از μ_0 به $\mu_0 + \delta_i\sigma$ منتقل می‌شود که در این حالت فرآیند خارج از کنترل آماری است. (δ_i میزان انتقال در میانگین بر اثر رخداد علت اسنادپذیر ith است.

۲. حد کنترلی بالا $\mu_0 + L(\sigma/\sqrt{n})$ و حد کنترلی پایین $\mu_0 - L(\sigma/\sqrt{n})$ است.

۳. احتمال‌های خطای نوع اول با فرض این‌که مشخصه کیفیت دارای توزیع $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ باشد $\alpha = 2(1-\Phi(L))$ و احتمال کشف تغییر در میانگین فرآیند پس از وقوع علت اسنادپذیر برابر ith است با

$$1-\beta_i = 1-(\Phi(L-\delta_i\sqrt{n})-\Phi(-L-\delta_i\sqrt{n})).$$

۴. زمان وقوع علت اسنادپذیر ith ($i = 1,2,\dots,m$) دارای توزیع $Burr12(s,c,k_i)$ با تابع چگالی است.

$$f_{T_i}(t) = \frac{k_i c (t/s)^{c-1}}{s(1+(t/s)^c)^{k_i+1}}, \qquad s,k_i,c>0, 0\le t<\infty,$$

۵. زمان‌های وقوع علت‌های اسنادپذیر مستقل از یکدیگر هستند؛ بنابراین $T = min(T_1,T_2,\dots,T_m)$ دارای توزیع $Burr12(s,c,k_0)$ است که $k_0 = \sum_{i=1}^{m} k_i$ است.

با انتخاب نمونه‌ای تصادفی به اندازه n از فرآیند تولید در زمان، فرآیند مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. h_l، l فاصله نمونه‌گیری است و چنان تعیین می‌شوند که احتمال خارج شدن فرآیند از حالت تحت کنترل در زمانی که ابتدای فاصله تحت کنترل بوده، برای تمام فاصله‌های نمونه‌گیری مقدار ثابتی بماند.

$$h_v = w_v - w_{v-1} = s((1+(h_1/s)^c)^v - 1)^{1/c} - s((1+(h_1/s)^c)^{v-1} - 1)^{1/c}, \quad v = 2,3,\dots.$$

۱. زمان اخذ نمونه‌گیری و رسم نمودار ناچیز فرض می‌شود.

۲. فرآیند خود اصلاح نیست. به عبارتی، وقتی فرآیند از حالت کنترل خارج شود فقط با دخالت عامل انسانی امکان بازگشت به حالت تحت کنترل دارد.

۳. فرآیند از حالت تحت کنترل شروع به کار می‌کند.

۴. پس از وقوع یک علت اسنادپذیر تا صدور هشدار درست، علت اسنادپذیر دیگری رخ ندهد. این پذیره یک پیشامد هست که با I نشان می‌دهیم.

نمادها و پارامترهای هزینه و زمان به‌صورت زیر هستند:

Z_0: متوسط زمان برای جست‌وجوی هشدار اشتباه است.

Z_1: متوسط زمان برای کشف علت اسنادپذیر *ith* زمانی که توسط نمودار تشخیص داده شده است.

Z_2i: متوسط زمان برای تعمیر علت اسنادپذیر *ith* زمانی که علت اسنادپذیر *ith* (*i=1,2,…,m*) کشف شده است.

D_0: متوسط هزینه کیفیت در واحد زمان برای حالت تحت کنترل می‌باشد.

D_1i: متوسط هزینه کیفیت در واحد زمان برای حالت خارج از کنترل مرتبط با علت اسنادپذیر *ith* (*i=1,2,…,m*).

Y: متوسط هزینه بررسی هشدار اشتباه زمانی که فرآیند تحت کنترل است.

D_2i: هزینه مکان‌یابی و تعمیر علت اسنادپذیر *ith* است.

a: هزینه ثابت نمونه‌گیری است.

b: هزینه هر واحد نمونه می‌باشد.

(متغیر صفر و یک): اگر فرآیند در طول زمان جست‌وجو انحرافات با دلیل ادامه پیدا کند مقدار یک و درصورتی‌که متوقف گردد مقدار صفر خواهد بود.

(متغیر صفر و یک): اگر هنگامی‌که علت اسنادپذیر *ith* اتفاق افتاده است، فرآیند در طول زمان اصلاح فرآیند ادامه پیدا کند مقدار یک و درصورتی‌که متوقف گردد مقدار صفر خواهد بود.

در این مقاله پس از رخداد علت اسنادپذیر *ith* میزان تغییری که در میانگین فرآیند رخ می‌دهد برابر با *d_(i)* است که سه توزیع یکنواخت، نیم-نرمال (1/√2π e^(−1/2 〖(1/2 d_(i))〗 ^2) و نمایی منفی (1/1 e^(−1/2 d_(i)) به‌عنوان توزیع پیشین برای *d_(i)* درنظر گرفته شده است.

۳- بناسازی مدل هزینه لورنزن و ونس واقع‌گرایانه نمودارهای کنترلی شوهارتی

۳-۱- محاسبه ARL در نمودارهای کنترلی شوهارتی

ARL یکی از معیارهای آماری است که به‌عنوان معیاری برای شناسایی توان نمودارهای کنترلی در طراحی‌های آماری مورداستفاده قرار می‌گیرد. *ARL* همچنین یکی از پارامترهای مهم در مدل اقتصادی لورنزن و ونس می‌باشد *ARL* بیانگر میانگین تعداد نمونه‌های لازم (به اندازه *n*) یا تعداد نقطه‌های رسم شده در نمودار تا قبل از دریافت اولین هشدار است. درواقع *ARL* مربوط به هر نمودار کنترلی شوهارتی، میانگین توزیع هندسی است که عملیات محاسبه آن زمانی که فرآیند تحت کنترل به سر می‌برد، یعنی ($\delta = 0$) به‌صورت زیر است:

$$ARL_{\delta=0} = ARL_0 = E(RL) = \sum_{r=1}^{\infty} r\, Pr(RL = r) = \sum_{r=1}^{\infty} r(1-\alpha)^{r-1}\alpha = \frac{1}{\alpha},$$

که در آن *RL* مدت‌زمانی است که طول می‌کشد تا نمونه‌ای خارج از کنترل قرار گیرد. این حالت ممکن است در زیرگروه منطقی اول یا در زیرگروه منطقی دوم و .... یا در زیرگروه منطقی *rth* رخ دهد.

اگر پس از وقوع علت اسنادپذیر *ith* تغییری در میانگین مشخصه کیفیت فرآیند به اندازه δ_i رخ داده و میانگین فرآیند $\mu_0 + \delta_i \sigma_0^2$ شود، محاسبه میانگین طول اجرای خارج از کنترل به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$ARL_{\delta>0} = ARL_1 = E(RL) = \sum_{r=1}^{\infty} r\, Pr(RL = r) = \sum_{r=1}^{\infty} r\beta_i^{r-1}(1-\beta_i) = \frac{1}{(1-\beta_i)}.$$

۲-۳- محاسبه احتمال وقوع پیشامد {I} بر اساس مدل شوک بر ۱۲

طبق آنچه در بخش ۲ بیان شد، با تبعیت از مدل واقع‌بینانه شجاعی و همکاران [22] در جهت ساده‌سازی محاسبه $E(T)$ و $E(C)$ فرض می‌کنیم که در مدت‌زمان سپری‌شده پس از وقوع یک علت اسنادپذیر تا شناسایی آن، علت اسنادپذیر دیگری رخ ندهد. که آن را با پیشامد I نشان می‌دهیم.

هر چرخه کیفیت از حالت تحت کنترل شروع شده و پس از خارج شدن از حالت تحت کنترل، با اصلاح و تعمیر علت اسنادپذیر به پایان می‌رسد و دوباره چرخه‌ای مشابه چرخه قبل تکرار می‌شود؛ بنابراین، با فرض متناهی بودن $E(T)$ و $E(C)$ با توجه به قضیه تجدید پاداش راس [24] نتیجه می‌شود که متوسط هزینه در واحد زمان ($E(A)$) برابر با نسبت $E(C)/E(T)$ در یک چرخه کیفیت است. چنانچه متغیرهای تصادفی X_1 تا X_4 به ترتیب، مدت‌زمان تحت کنترل بودن فرآیند (با احتساب مدت‌زمان سپری‌شده برای یافتن هشدار اشتباه)، مدت‌زمان خارج از کنترل بودن فرآیند تا صدور هشدار درست، مدت‌زمان سپری‌شده پس از هشدار درست تا کشف علت اسنادپذیر و مدت‌زمان سپری‌شده برای تعمیر و اصلاح فرآیند پس از کشف علت اسنادپذیر باشند آنگاه

$$E(T)=E(X_1)+E(X_2+X_3+X_4).$$

قضیه ۱- اگر I_i پیشامد وقوع ith علت اسنادپذیر و عدم وقوع سایر علت‌های اسنادپذیر تا صدور هشدار درست باشد، آنگاه $P(I)=P(\bigcup_{i=1}^{m} I_i)=\sum_{i=1}^{m} P(I_i)$ که در آن

$$P(I_i)=\frac{(1-\beta_i)[1-(1+(h_1/s)^c)^{-k_i}](1+(h_1/s)^c)^{-k_{-i}})}{(1-\beta_i(1+(h_1/s)^c)^{-k_{-i}})(1-(1+(h_1/s)^c)^{-k_0})}.$$

اثبات: در جهت خلاصه‌نویسی مراحل اثبات عبارت‌های زیر تعریف می‌شود:

$$k_0=\sum_{i=1}^{m} k_i \ , \ k_{-i}=k_0-k_i,$$
$$\{\boldsymbol{T}_{-i}>X\}=\{T_1>X,T_2>X,...,T_{i-1}>X,T_{i+1}>X,...,T_m>X\},$$
$$I_i=\{T_i\le X,\boldsymbol{T}_{-i}>X\}.$$

بنابراین به ازای $i<j$ ، $I_i\cap I_j$ تهی می‌باشد.

با استفاده از قانون احتمال کل داریم

$$P(I_i)=\sum_{v=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{v} P(w_{l-1}<T_i\le w_l,\boldsymbol{T}_{-i}>w_v,X=w_v)=\sum_{v=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{v} P(X=w_v \mid w_{l-1}<T_i\le w_l,\boldsymbol{T}_{-i}>w_v),$$
$$P(w_{l-1}<T_i\le w_l,\boldsymbol{T}_{-i}>w_v).$$

با توجه به تعریف متغیرها و همچنین مفروضات داریم

$$P(I_i)=\sum_{v=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{v}\beta_i^{v-l}(1-\beta_i)[(1+(h_1/s)^c)^{-k_i(l-1)}-(1+(h_1/s)^c)^{-k_i l}](1+(h_1/s)^c)^{-k_{-i}v}$$
$$=\frac{(1-\beta_i)[1-(1+(h_1/s)^c)^{-k_i}](1+(h_1/s)^c)^{-k_{-i}})}{(1-\beta_i(1+(h_1/s)^c)^{-k_{-i}})(1-(1+(h_1/s)^c)^{-k_0})}.$$

به‌وضوح $\{I\}=\bigcup_{i=1}^{m} I_i$ است و چون برای هر $i\neq j$ داریم $I_i\cap I_j=\varnothing$ بنابراین، $P(I)=\sum_{i=1}^{m} P(I_i)$ است.

۳-۳- مدت‌زمان مورد انتظار یک چرخه کیفیت

برای محاسبه $E(T)$، آن را به دو بخش جدا از هم افراز نموده و همانند شجاعی و همکاران [22] فرض می‌شود که پیشامد I نیز رخ دهد؛ بنابراین، در جهت ساده‌سازی محاسبه $E(T)$ با توجه به تعریف متغیر تصادفی I داریم

$$E(T)=E(T|I)P(I)+E(T|I^c)P(I^c).$$

با توجه به اینکه محاسبه $E(T)$ پیچیده و غیرممکن است فرض می‌شود؛ اگر شرایطی ایجاد شود که $E(T|I^c)P(I^c)\approx 0$ باشد آنگاه

$$E(T)=E\left(\sum_{i=1}^{4}X_i\right)\approx E(X_1)+E\left(\sum_{i=2}^{4}X_i \mid I\right)P(I),$$

خواهد شد [22]. با توجه به اینکه متوسط زمان خارج از کنترل مقداری متناهی است، پس برای برقراری معادله فوق کافی است که $P(I)$ تقریبا به ۱ نزدیک باشد. به‌وضوح $P(I)\approx 1$ به این معنی است که احتمال وقوع بیش از یک علت اسناد‌پذیر در هر چرخه کیفیت تقریبا برابر صفر است. با توجه به اینکه متوسط زمان تحت کنترل برابر با مجموع متوسط زمان سپری‌شده تا وقوع اولین علت اسناد‌پذیر و متوسط زمان بررسی هشدارهای نادرست است. همچنین با درنظر این ویژگی مدل لورنزن و ونس که تولید می‌تواند حین جست‌وجوی علت اسناد‌پذیر متوقف شود یا خیر (γ_1)، $E(X_1)=E(T)+(1-\gamma_1)Z_0E(N_{Fa})$ که در آن N_{Fa} تعداد هشدارهای نادرست در هر چرخه کیفیت است. اگر N_{In} تعداد مراحل نمونه‌گیری در حالت تحت کنترل باشد داریم

$$(N_{Fa} \mid N_{In}=v)\approx Bin(v,\alpha)$$
$$E(N_{Fa})=E(E(N_{Fa} \mid N_{In}))=E(\alpha N_{In}).$$

چون N_{In} یک متغیر تصادفی نامنفی است پس $E(N_{In})=\sum_{v=1}^{\infty}P(N_{In}\geq v)$ ، با توجه به اینکه $N_{In}\geq v \cong T>w_v$ آنگاه

$$E(N_{In})=\sum_{v=1}^{\infty}P(T>w_v)=\sum_{v=1}^{\infty}([1+(h_1/s)^c]^{-k_0})^v=\frac{[1+(h_1/s)^c]^{-k_0}}{1-[1+(h_1/s)^c]^{-k_0}}.$$

بنابراین

$$E(X_1)=sk_0\frac{\Gamma(k_0-(1/c))\Gamma(1+(1/c))}{\Gamma(k_0+1)}+(1-\gamma_1)Z_0\alpha\frac{(1+(h_1/s)^c)^{-k_0}}{1-(1+(h_1/s)^c)^{-k_0}}. \qquad (۱)$$

متوسط زمان خارج از کنترل برابر است با

$$E(X_2 \mid I)=E(X-X_1)=E(X \mid I)-E(X_1 \mid I).$$

با توجه به اینکه فرآیند پس از هر هشدار از سوی نمودار کنترلی متوقف می‌شود، پس متغیرهای تصادفی X و X_1 شامل مدت‌زمان بررسی هشدارهای نادرست نیز هستند؛ بنابراین، $X'=X-Z_0N_{F_a}$ و $X_1'=X_1-Z_0N_{F_a}$ که پس از ساده‌سازی محاسبات داریم، $E(X_2 \mid I)=E(X \mid I)-E(X_1 \mid I)$.

در **لم‌های ۱** تا **۳** به محاسبه اجزا تشکیل‌دهنده میانگین زمان خارج از کنترل می‌پردازیم.

لم ۱- متوسط زمان سپری‌شده از ابتدای چرخه کیفیت تا صدور هشدار درست (X) به‌شرط I عبارتند از:

$$E(X \mid I)=\sum_{v=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}w_v\frac{1}{P(I)}(1-\beta_i)[1-(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i}]$$
$$\frac{((1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_0})^v-(\beta_i(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_{-i}})^v}{(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i}-\beta_i}.$$

اثبات:

$$E(X' \mid I)=\sum_{v=1}^{\infty} w_v P(X=w_v \mid I)=\sum_{v=1}^{\infty} w_v \frac{P(X=w_v, I)}{P(I)}$$
$$=\sum_{v=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} w_v \frac{1}{P(I)} \underbrace{P(X=w_v, T_i \le w_v, \vec{T}_{-i} > w_v)}_{:=D}$$
$$D=P(X=w_v, T_i \le w_v, \vec{T}_{-i} > w_v)$$
$$=\sum_{l=1}^{v} P(X=w_v, w_{l-1} < T_i \le w_l, \vec{T}_{-i} > w_v)$$
$$=\sum_{l=1}^{v} P(X=w_v \mid w_{l-1} < T_i \le w_l, \vec{T}_{-i} > w_v)$$
$$P(w_{l-1} < T_i \le w_l, \vec{T}_{-i} > w_v)$$
$$=(1-\beta_i)[1-(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i}]$$
$$\frac{(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-vk_0}-(\beta_i(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_{-i}})^v}{(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i}-\beta_i}.$$

لم ۲- اگر $f_T(t \mid I)$ توزیع زمان تحت کنترل بودن فرآیند به‌شرط وقوع فقط یک علت اسنادپذیر تا صدور هشدار درست باشد، آنگاه متوسط زمان تحت کنترل به‌شرط وقوع فقط یک علت اسنادپذیر برابر است با

$$E(X_1 \mid I)=\int_0^{\infty} t f_T(t \mid I)dt=\sum_{v=1}^{\infty}\int_{w_{v-1}}^{w_v} t f_T(t \mid I)dt$$
$$=\frac{1}{P(I)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{v=1}^{\infty}(1-\beta_i)\frac{(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-vk_{-i}}}{1-\beta_i(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_{-i}}}$$
$$\int_{w_{v-1}}^{w_v} -k_0(1+(\frac{t}{s})^c)^{-k_0-1}\frac{ct^c}{s^c}dt.$$

اثبات:

$$E(X_1' \mid I)=\int_0^{\infty} t f_T(t \mid I)dt=\sum_{v=1}^{\infty}\int_{w_{v-1}}^{w_v} t f_T(t \mid I)dt$$
$$f_T(t \mid I)dt \approx \frac{P(t<T\le t+dt, I)}{P(I)},$$
$$\frac{P(t<T\le t+dt, I)}{P(I)}=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{P(t<T\le t+dt, I, X=w_l)}{P(I)},$$
$$\xrightarrow{t<w_v<w_l}=\sum_{l=v}^{\infty}\frac{P(t<T\le t+dt, I, X=w_l)}{P(I)}$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{P(I)}\sum_{l=v}^{\infty}P(X=w_l \mid t<T_i\le t+dt, \vec{T}_{-i}>w_l)$$
$$P(t<T_i\le t+dt, \vec{T}_{-i}>w_l),$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{P(I)}(1-\beta_i)P(t<T_i\le t+dt)\frac{(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-vk_{-i}}}{1-\beta_i(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_{-i}}},$$
$$f_T(t \mid I)=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{P(I)}(1-\beta_i)(f_{T_i}(t))\frac{(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-vk_{-i}}}{1-\beta_i(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_{-i}}}.$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{P(I)} (1-\beta_i)[k_i (1+(\frac{t}{s})^c)^{-k_i-1} \frac{ct^{c-1}}{s^c}]$$

$$(\frac{(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-vk_{-i}}}{1-\beta_i (1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_{-i}}})$$

$$\Rightarrow E(X_1' \mid I) = \frac{1}{P(I)} \sum_{i=1}^{m} \sum_{v=1}^{\infty} (1-\beta_i) \frac{(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-vk_{-i}}}{1-\beta_i (1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_{-i}}}$$

$$\int_{w_{v-1}}^{w_v} k_i (1+(\frac{t}{s})^c)^{-k_i-1} \frac{ct^c}{s^c} dt.$$

انتگرال $\int_{w_{v-1}}^{w_v} k_i (1+(\frac{t}{s})^c)^{-k_i-1} \frac{ct^c}{s^c} dt$ دارای مقدار متناهی است. با توجه به اینکه در توزیع بر ۱۲؛ $s, k_i, c > 0, 0 \le t < \infty$ است،

$$\int_{w_{v-1}}^{w_v} k_i (1+(\frac{t}{s})^c)^{-k_i-1} \frac{ct^c}{s^c} dt \le \sum_{v=1}^{\infty} \int_{w_{v-1}}^{w_v} k_i (1+(\frac{t}{s})^c)^{-k_i-1} \frac{ct^{c-1}}{s^c} dt = E(t) \le \infty.$$

لم ۳- اگر $E(X_3+X_4 \mid I)$ متوسط زمان کشف، اصلاح و تعمیر علت اسنادپذیر ith به‌شرط وقوع فقط یک علت اسنادپذیر تا صدور هشدار درست باشد آنگاه

$$E(X_3 + X_4 \mid I) = \sum_{i=1}^{m} [(Z_1 + Z_{2i}) \frac{P(I_i)}{P(I)}].$$

اثبات: متوسط زمان اصلاح و تعمیر فرآیند به‌شرط وقوع فقط یک علت اسنادپذیر تا صدور هشدار درست پس از شناسایی علت اسنادپذیر $E(X_4 \mid I)$ برابر است با

$$E(X_4 \mid I) = \sum_{i=1}^{m} Z_{2i} P(X_4 = Z_{2i} \mid I) = \sum_{i=1}^{m} Z_{2i} \frac{P(X_4 = Z_{2i}, I)}{P(I)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\infty} Z_{2i} \frac{P(T_i \le w_j, \vec{T}_{-i} > w_j, X = w_j)}{P(I)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} Z_{2i} \frac{1}{P(I)} \frac{(1-\beta_i)[1-(1+(h_1/s)^c)^{-k_i}](1+(h_1/s)^c)^{-k_{-i}})}{(1-\beta_i (1+(h_1/s)^c)^{-k_{-i}})(1-(1+(h_1/s)^c)^{-k_0})} = \sum_{i=1}^{m} Z_{2i} \frac{P(I_i)}{P(I)}.$$

قضیه ۲- با توجه به **معادله (۱)** متوسط زمان یک چرخه کیفیت با فرض قابل‌اغماض بودن $E(X_2+X_3+X_4 \mid I^c) P(I^c)$ و با توجه به این ویژگی مدل لورنزن و ونس که تولید می‌تواند حین جست‌وجوی علت اسنادپذیر متوقف شود یا خیر (γ_1) و همچین این ویژگی که تولید حین تعمیر فرآیند متوقف می‌شود یا خیر (γ_2) و نیز با توجه به روابط

$$ARL_{00} = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = ARL_0^{-1}. \qquad (۲)$$

$$ARL_{10} = \frac{1}{1-\beta_i} \Rightarrow \beta_i = 1 - ARL_{1i}^{-1}. \qquad (۳)$$

عبارتند از

$$E(T)=sk_0\frac{\Gamma(k_0-(1/c))\Gamma(1+(1/c))}{\Gamma(k_0+1)}$$
$$+(1-\gamma_1)Z_0(ARL_0^{-1})\frac{(1+(h_1/s)^c)^{-k_0}}{1-(1+(h_1/s)^c)^{-k_0}}$$
$$+\sum_{v=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}w_v\frac{1}{P(I)}(ARL_{1i}^{-1})[1-(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i}]$$
$$\frac{((1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_0})^v-((1-ARL_{1i}^{-1})(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_{-i}})^v}{(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i}-(1-ARL_{1i}^{-1})}$$
$$-\frac{1}{P(I)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{v=1}^{\infty}(ARL_{1i}^{-1})\frac{(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-vk_{-i}}}{1-(1-ARL_{1i}^{-1})(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_{-i}}}$$
$$\int_{w_{v-1}}^{w_v}-k_0(1+(\frac{t}{s})^c)^{-k_0-1}\frac{ct^c}{s^c}dt+\sum_{i=1}^{m}[(Z_1+Z_{2i})\frac{P(I_i)}{P(I)}].$$

اثبات: با توجه به **لم ۱** تا **۳** و **معادله (۱)**، اثبات واضح است.

۴-۳- هزینه مورد انتظار یک چرخه کیفیت

متوسط هزینه چرخه کیفیت شامل ۱- متوسط هزینه در زمان تحت کنترل ($D_0E(T)$)، ۲- متوسط هزینه جست‌وجوی هشدارهای اشتباه ($YE(N_{Fa})$)، ۳- متوسط هزینه در زمان خارج از کنترل ($D_{1i}E(X_2\mid I)$)، ۴- متوسط هزینه نمونه‌گیری ($(a+bn)E(N_{Tot}\mid I)$) و ۵- متوسط هزینه مکان‌یابی، تشخیص و تعمیر علت اسنادپذیر ($\sum_{i=1}^{m}(P(I_i)/P(I))D_{2i}$) می‌شود.

بنابراین، با توجه به مراحل محاسبه ($E\ T$)، اجزای تشکیل‌دهنده $E(C)$ به شرح زیر هستند:

۱. مجموع متوسط هزینه در زمان تحت کنترل و متوسط هزینه جست‌وجو هشدارهای اشتباه برابر با **رابطه (۴)** است.

$$D_0E(T)+YE(N_{Fa})=$$
$$D_0sk_0\frac{\Gamma(k_0-(1/c))\Gamma(1+(1/c))}{\Gamma(k_0+1)}$$
$$+Y(1-\gamma_1)\alpha\frac{(1+(h_1/s)^c)^{-k_0}}{1-(1+(h_1/s)^c)^{-k_0}}, \qquad (۴)$$

۲. متوسط هزینه خارج از کنترل برابر

$$D_{1i}E(X_2\mid I)$$
$$=\sum_{v=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}D_{1i}w_v\frac{1}{P(I)}(1-\beta_i)[1-(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i}]$$
$$\frac{((1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_0})^v-(\beta_i(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_{-i}})^v}{(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i}-\beta_i} \qquad (۵)$$
$$-\frac{1}{P(I)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{v=1}^{\infty}D_{1i}(1-\beta_i)\frac{(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-vk_{-i}}}{1-\beta_i(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_{-i}}}$$
$$\int_{w_{v-1}}^{w_v}-k_i(1+(\frac{t}{s})^c)^{-k_i-1}\frac{ct^c}{s^c}dt.$$

لم ۴- اگر N_{TST} و N_{OC} به ترتیب تعداد کل نمونه‌های اخذشده از فرآیند و تعداد نمونه‌های اخذشده از فرآیند در حالت خارج از کنترل باشند آنگاه

$$E(N_{OC}|I)=\sum_{i=1}^{m}\frac{P(I_i)}{P(I)}\left[\frac{(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_0}}{1-(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_0}}+\frac{1}{1-\beta_i(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_{-i}}}\right]-\frac{(1+(h_1/s)^c)^{-k_{.}})}{1-(1+(h_1/s)^c)^{-k_{.}})}=\sum_{i=1}^{m}\frac{P(I_i)}{P(I)}\left[\frac{1}{1-\beta_i(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_{-i}}}\right]. \quad (۶)$$

$$E(N_{TST}\mid I)=\sum_{i=1}^{m}\frac{P(I_i)}{P(I)}\left[\frac{(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_0}}{1-(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_0}}+\frac{1}{1-\beta_i(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_{-i}}}\right]. \quad (۷)$$

اثبات: اگر N_{INC} برابر تعداد نمونه‌های اخذشده از فرآیند در حالت تحت کنترل باشد به‌وضوح $N_{OC}=N_{TST}-N_{INC}$ است؛ بنابراین، $E(N_{OC}|I)=E(N_{TST}|I)-E(N_{INC}\mid I)$ است.

$$E(N_{TST}\mid I)=\sum_{v=1}^{\infty}v\frac{P(N_{TST}=v,I)}{P(I)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{P(I_i)}{P(I)}\left[\frac{(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_0}}{1-(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_0}}+\frac{1}{1-\beta_i(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_{-i}}}\right],$$

چون N_{INC} یک متغیر تصادفی نامنفی است آنگاه $E(N_{INC}\mid I)=\sum_{v=1}^{\infty}P(N_{INC}\geq v\mid I)$ ، با توجه به اینکه $N_{INC}\geq v\cong T>w_v$ آنگاه

$$E(N_{INC}\mid I)=\sum_{v=1}^{\infty}P(T>w_v\mid I)=\sum_{i=1}^{m}\frac{P(I_i)}{P(I)}\sum_{v=1}^{\infty}([1+(h_1/s)^c]^{-k_0})^v=\frac{[1+(h_1/s)^c]^{-k_0}}{1-[1+(h_1/s)^c]^{-k_0}}.$$

با توجه به **لم ۴** متوسط هزینه نمونه‌گیری برابر

$$(a+bn)E(N_{TST}\mid I)=(a+bn)\sum_{i=1}^{m}\frac{P(I_i)}{P(I)}\left[\frac{(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_0}}{1-(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_0}}+\frac{1}{1-\beta_i(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_{-i}}}\right], \quad (۸)$$

است.

احتمال اینکه علت اسنادپذیر *ith* باعث خروج فرآیند از حالت تحت کنترل‌شده باشد برابر $\frac{P(I_i)}{P(I)}$ است؛ بنابراین متوسط هزینه مکان‌یابی، تشخیص و تعمیر علت اسنادپذیر برابر $\sum_{i=1}^{m}\frac{P(I_i)}{P(I)}D_{2i}$ است؛ بنابراین، با توجه به مراحل محاسبه ($E\ T$، اجزای تشکیل‌دهنده $E(C)$ به شرح زیر هستند:

با توجه به **معادله (۴) تا معادله (۸)** و با توجه به **رابطه‌های (۲)** و **(۳)**، متوسط هزینه یک چرخه‌ی کیفیت برابر است با

$$
\begin{aligned}
E(C) = {} & D_0 s k_0 \frac{\Gamma(k_0-(1/c))\Gamma(1+(1/c))}{\Gamma(k_0+1)} \\
& + \frac{Y}{ARL_0}\frac{(1+(h_1/s)^c)^{-k_0}}{1-(1+(h_1/s)^c)^{-k_0}} \\
& + \sum_{v=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} D_{1i} w_v \frac{1}{P(1)ARL_{1i}}[1-(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i}] \\
& \frac{((1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_0})^v - ((1-ARL_{1i}^{-1})(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_{-i}})^v}{(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i} - (1-ARL_{1i}^{-1})} \\
& - \frac{1}{P(I)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty} D_{1i}\frac{1}{ARL_{1i}}\frac{(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-vk_{-i}}}{1-(1-ARL_{1i}^{-1})(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_{-i}}} \\
& \int_{w_{v-1}}^{w_v} -k_0(1+(\frac{t}{s})^c)^{-k_0-1}\frac{ct^c}{s^c}dt \\
& + \sum_{i=1}^{m} D_{1i}[(\gamma_1 Z_1 + \gamma_{2i} Z_{2i})\frac{P(I_i)}{P(I)}] + \sum_{i=1}^{m}\frac{P(I_i)}{P(I)}D_{2i} \\
& + (a+bn)\sum_{i=1}^{m}\frac{P(I_i)}{P(I)}([\frac{(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_0}}{1-(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_0}} \\
& + \frac{1}{1-(1-ARL_{1i}^{-1})(1+(\frac{h_1}{s})^c)^{-k_{-i}}}] + (\gamma_1 Z_1 + \gamma_{2i} Z_{2i}))
\end{aligned}
$$

با توجه به این‌که هدف ما یافتن مقادیر بهینه پارامترهای طراحی نمودار کنترلی $\bar{X}$ برای کمینه نمودن $E(A)=E(C)/E(T)$ در شرایطی است که پیشامد I با احتمال نزدیک به یک رخ دهد طراحی آماری-اقتصادی واقع‌بینانه (*RESD*) را می‌توان به‌صورت

$$
RSED\ Model:\begin{cases} minimize\ E(A), \\ subject\ to: \\ P(I)\geq p_0, \\ ARL_0 \geq ARL_{0l}, \\ ARL_1 \geq ARL_{1l}. \end{cases} \qquad (۹)
$$

فرمول‌بندی نمود که در آن p_0 ، کران پایین موردقبول برای $P(I)$ در انتخاب پارامترهای طراحی است. به‌منظور ارزیابی عملکرد نمودار کنترلی از شاخص *ARL0* و *ARL1* استفاده می‌شود به‌طوری‌که $ARL_0=1/\alpha$ و $ARL_{1overall}=1/(1-\beta_{overall})$ که در آن ابتدا β_j یعنی احتمال وقوع خطای نوع دوم به ازای علت اسنادپذیر jth برای $j=1,2,...,m$ به‌دست می‌آید و در نهایت β کل نمودار کنترلی برابر است با $\beta_{overall}=\sum_{j=1}^{m}\beta_j(P(I_i)/P(I))$. در بخش بعد به پردازش طراحی آماری-اقتصادی نمودارهای کنترلی $\bar{X}$ پرداخته شده است.

۴- نتایج تحلیل عددی

در این بخش، پارامترهای طراحی بهینه n، $h1$ و L را با به حداقل رساندن تابع هزینه واقع‌بینانه پیدا می‌کنیم. کلیه تحلیل‌های عددی در این بخش، با استفاده از نرم‌افزار R نسخه‌ی ۴/۳/۱ و آخرین نسخه پکیج $DEoptim$ در آن انجام شده‌اند. پارامترهای ورودی مدل را می‌توان به پارامترهای هزینه ($Y, D_0, D_{1i}, D_{2i}, a, b, \gamma_1, \gamma_2$)، پارامترهای زمان (Z_0, Z_1, Z_{2i})، پارامترهای انتقال (δ_i) و پارامترهای توزیع بر ۱۲ (s, c, k_i) طبقه‌بندی نمود.

۴-۱- بررسی تاثیر احتمال پیشامد I در طراحی نمودار کنترلی $\bar{X}$ در حضور علت‌های اسنادپذیر مستقل تحت مدل شوک بر ۱۲

این بخش به بررسی احتمال وقوع پیشامد I در طراحی نمودار کنترلی $\bar{X}$ در حضور علت‌های اسنادپذیر تحت مدل شوک بر ۱۲ می‌پردازد. برای مقایسه‌پذیر بودن نتایج مدل ما با مدل سعادت‌ملی و همکاران [5]، پارامترهای ورودی مدل بر اساس مقاله سعادت‌ملی و همکاران [5] مقداردهی شده‌اند، همچنین $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ قرار داده شده است. پارامترهای ورودی مدل در **جدول ۱** آمده است. برای همه علت‌های اسنادپذیر، مقادیر $Y =$ 2000$، $D_0 =$ 210$، $a =$ 20$، $b = 1.25h$ و $Z_0 = 1.25$ $Z_1 = 1.25$ یکسان فرض می‌شوند. پارامترهای λ_i، Z_{2i}، D_{i1} و D_{2i} نیز تابعی از δ_i هستند. برای بررسی قواعد تعیین این پارامترها به بخش ۵ مقاله سعادت‌ملی و همکاران [5] مراجعه شود. همچنین فرض می‌شود در طراحی آماری-اقتصادی واقع‌بینانه p_0 مقادیر ۰/۹۹، ۰/۹۵، ۰/۹۰ و ۰/۸۵ اختیار کند. قابل‌ذکر است که نزدیک شدن مقدار p_0 به ۱ معادل ایجاد شرایطی برای واقع‌بینانه نمودن رخداد فرض دوم در محاسبه میانگین هزینه در واحد زمان چرخه کیفیت است.

جدول ۲ مقادیر بهینه پارامترهای طراحی برای طراحی اقتصادی نمودار کنترلی $\overline{X}$ در حضور ۷ علت اسنادپذیر مستقل چندگانه تحت دو مدل RED و سعادت‌ملی و همکاران [5] آورده شده است. چون در مدل اقتصادی سعادت‌ملی و همکاران [5]، احتمال وقوع پیشامد I در محاسبه $E(A)$ منظور نشده است، پس جهت مقایسه عادلانه این دو مدل اقتصادی فرض می‌شود که در مدل RED محدودیتی برای احتمال وقوع پیشامد I نداشته باشد ($p_0 = 0$).

در **جدول ۲** مشاهده می‌شود که در هر سه توزیع پیشین NE، Un و HN با مقادیر مختلفی از c و $\underline{s}$ یکسان در هر دو مدل، مقدار هزینه در واحد زمان در مدل سعادت ملی و همکاران [5] به‌طور محسوس از مدل RED کمتر است؛ بنابراین، بااینکه سعادت ملی و همکاران [5] فرض کردند که پیشامد I رخ دهد ولی چون این فرض را در به‌دست آوردن $E(A)=E(C)/E(T)$ منظور نکردند باعث انحراف شدید در نتایج آن‌ها شده است. در ادامه با توجه به این‌که در طراحی اقتصادی به ویژگی‌های آماری توجه نمی‌شود، به تعیین پارامترهای طراحی در طراحی آماری-اقتصادی ارایه شده در **رابطه (۹)** پرداخته می‌شود.

۴-۲- نتایج تحلیل عددی طراحی آماری-اقتصادی واقع‌بینانه نمودار کنترلی شوهارتی $\overline{X}$

در اجرای طراحی آماری-اقتصادی واقع‌بینانه، با توجه به مقدار حداقل متوسط طول اجرای تحت کنترل و خارج از کنترل موردقبول به تعیین پارامترهای طراحی پرداخته می‌شود. برای این منظور ARL_{0I} و ARL_{1I} به ترتیب برابر ۲۰۰ و ۱/۱۱ درنظر گرفته می‌شود. بر اساس **معادله (۹)**، برای کاهش احتمال وقوع بیش از یک علت اسنادپذیر تا صدور هشدار درست که به معنی واقع‌بینانه نمودن وقوع پیشامد I در مدل RED، باید مقدار p_0 افزایش داده شود؛ بنابراین، برای بررسی اثر قید $P(I) \geq p_0$ بر پارامترهای طراحی و $E(A)$، در **جدول ۳**، مقدار بهینه پارامترهای طراحی با درنظر گرفتن مقادیر مختلف برای p_0، تحت سه توزیع پیشین محاسبه شده است.

نتایج **جدول ۳** نشان می‌دهد که با افزایش p_0 از ۰/۸۵ به ۰/۹۹ مقدار $E(A)$ تحت هر سه توزیع پیشین NE، HN و Un افزایشی است. برای مقدار ثابت c و s در هر سه توزیع پیشین، با افزایش p_0 از ۰/۸۵ به ۰/۹۹ مقدار بهینه اندازه نمونه n ، h و L به‌دست آمده روند غیرصعودی دارند.

۵- نتیجه‌گیری

هدف اصلی در طراحی نمودارهای کنترلی، تعیین بهینه پارامترهای طرح موردمطالعه است. هدف طراحی‌های اقتصادی و آماری-اقتصادی تعیین پارامترهای طراحی به‌گونه‌ای است که متوسط هزینه پیاده‌سازی نمودار در واحد زمان کمینه شود. تعیین پارامترهای تنظیمی بهینه در طراحی‌های اقتصادی و آماری-اقتصادی نمودارهای کنترلی، بیش از همه، به توزیع طول عمر فرآیند، یعنی توزیع مدت‌زمان تحت کنترل بودن آن تا رخداد علت یا علت‌های اسنادپذیر، بستگی دارد. در اکثر فرآیندهای تولیدی، بیش از یک علت اسنادپذیر باعث تغییرپذیری در مشخصه کیفیت محصول و درنتیجه کاهش کیفیت فرآیند تولید می‌شود.

در این مقاله یک مدل اقتصادی واقع‌بینانه و کاربردی برای طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل $\overline{X}$ در حضور چندین علت اسنادپذیر مستقل تحت مدل شوک ببر ۱۲در جهت اصلاح کاستی‌های مدل‌های قبلی ارایه شد. مقایسه بین نتایج عددی به‌دست آمده از مدل *RED* ما با نتایج سعادت‌ملی و همکاران [5] در طراحی اقتصادی و آماری-اقتصادی نمودار کنترل $\overline{X}$، حاکی از کم‌برآوردی شدید متوسط هزینه در واحد زمان چرخه کیفیت در مدل آن‌ها بود.

نتایج عددی نشان داد که استفاده از مدل واقع‌بینانه آماری-اقتصادی برای تعیین پارامترهای طراحی نمودار کنترلی $\overline{X}$ در حضور چندین علت اسنادپذیر تحت مدل شوک بر ۱۲ متوسط هزینه در واحد زمان چرخه کیفیت با افزایش احتمال *p0* روند غیرنزولی دارد که اهمیت درنظر گرفتن احتمال پیشامد I را در محاسبات $E(A)$ نشان می‌دهد؛ بنابراین، به مدیران و صاحبان صنایع پیشنهاد می‌شود برای تخمین درست از هزینه‌های مربوط به پایش فرآیندهای تولیدی از مدل واقع‌بینانه در طراحی آماری-اقتصادی نمودارهای کنترلی $\overline{X}$ در حضور چندین علت اسنادپذیر تحت مدل شوک بر ۱۲ استفاده کنند. از موضوعات جالب برای پژوهش‌های آینده می‌توان به بررسی اثرات استفاده از مدل *RESD* در طراحی آماری-اقتصادی انواع نمودارهای کنترلی پارامتری و غیرپارامتری و نیز نمودارهای کنترلی سازوار تحت مدل شوک بر ۱۲ اشاره کرد.

جدول ۱- مجموعه مقادیر پارامترهای ورودی مدل (جدول ۳ سعادت ملی و همکاران [5]).

Table 1- Set of model input parameter values (Table 3 of Saadat Melli et al. [5]).

i	δ_i	D_{1i}	D_{2i}			Z_{2i}			k_i		
			NE_i	Un_i	HN_i	NE_i	Un_i	HN_i	NE_i	Un_i	HN_i
1	1	575	1647	1000	1454	3.293	2	2.909	11.429	6.932	10.086
2	1.5	1684	1283	1000	1244	2.565	2	2.488	8.901	6.932	8.627
3	1.8	2901	1103	1000	1099	1.1.03	2	2.198	7.661	6.932	7.623
4	2	4000	1000	1000	1000	2	2	2	6.932	6.932	6.932
5	2.2	5341	902	1000	901	1.804	2	1.802	6.272	6.932	6.241
6	2.5	7776	777	1000	756	1.554	2	1.512	5.399	6.932	5.233
7	3	12602	609	1000	537	1.217	2	1.074	4.735	6.932	4.289

* NE: نمایی منفی؛ Un: یکنواخت؛ HN: نیم نرمال

جدول ۲- بررسی تاثیر احتمال پیشامد I در طراحی نمودار کنترلی $\bar{X}$ در حضور علت‌های اسنادپذیر مستقل تحت مدل شوک بر ۱۲.

Table 2- Investigating the effect of the probability of event I in the design of the $\bar{X}$ control chart in the presence of independently attributable causes under the Ber12 shock model.

EA	P(I)	L	h	n	s	c	EA	P(I)	L	h	n	p0	PD	s	c
332.44	0.912	2.57	13.59	4	50	4.79	283.49	0.937	2.67	28.35	3	S.e	HN	100	5.5
491.434	0	0.1	88.207	1			319.528	0.948	2.575	27.806	3	0			
332.84	0.908	2.55	13.88	4			274.57	0.935	2.54	30.55	4	S.e	NE		
460.788	0	0.1	68.805	1			321.281	0.947	2.574	27.614	3	0			
340.79	0.934	2.64	13.22	4	-		283.49	0.951	2.67	29.43	4	S.e	UN		
387.765	0.939	2.633	12.205	3			327.316	0.957	2.647	27.239	3	0			
302.74	0.932	2.54	19.73	4	83.55	4.33	300.8	0.923	2.59	20.3	4	S.e	HN	50	7
348.394	0.943	2.566	16.905	3			435.464	0	0.1	71.25	1	0			
302.79	0.937	2.62	17.39	3			300.85	0.918	2.58	20.34	4	S.e	NE		
350.979	0.941	2.564	16.762	3			337.312	0.922	2.573	19.307	3	0			
312.16	0.948	2.66	17.98	4			306.3	0.93	2.65	20.3	4	S.e	UN		
358.105	0.953	2.637	16.472	3			343.552	0.938	2.641	19.081	3	0			
276.42	0.927	2.55	30.3	4	75	7	297.74	0.942	2.63	18.92	4	S.e	HN	100	4
315.882	0.939	2.576	28.145	3			345.966	0.947	2.566	17.351	3	0			
276.42	0.923	2.59	30.19	4			296.17	0.938	2.56	19.24	4	S.e			
317.779	0.939	2.559	27.897	3			348.401	0.945	2.564	17.195	3	0	NE		
283.39	0.942	2.67	29.5	4			308.35	0.952	2.66	18.52	4	S.e			
323.483	0.95	2.648	27.68	3			355.435	0.956	2.637	16.877	3	0	UN		
299.85	0.999	2.49	20.68	4	60.42	5.88	264.51	0.935	2.55	39.73	4	S.e	HN	100	7
338.885	0.933	2.561	19.184	3			303.78	0.947	2.58	36.645	3	0			
299.7	0.918	2.56	20.5	4			264.62	0.93	2.65	37.52	3	S.e			
341.469	0.929	2.574	19.109	3			305.212	0.946	2.579	36.441	3	0	NE		
306.73	0.938	2.65	20.19	4			270.89	0.949	2.67	38.48	4	S.e			
348.069	0.945	2.641	18.795	3			310.527	0.956	2.652	36.05	3	0	UN		
274.91	0.932	2.65	30.47	3	87.5	6.47	329.5	0.922	2.62	12.61	3	S.e	HN	66.84	4
314.318	0.944	2.577	29.853	3			369.218	0.935	2.56	12.277	3	0			
275.01	0.933	2.66	30	3			327.34	0.917	2.53	14.04	4	S.e	NE		
316.034	0.942	2.575	29.674	3			372.586	0.934	2.557	12.142	3	0			
280.37	0.947	2.67	31.4	4			337.89	0.943	2.65	13.05	4	S.e	UN		
321.793	0.954	2.649	29.326	3			380.36	0.946	2.631	11.932	3	0			

جدول ۳- مقدار بهینه پارامترهای طراحی آماری-اقتصادی واقع‌بینانه نمودار کنترلی $\bar{X}$ در حضور علت‌های اسنادپذیر مستقل تحت مدل شوک بر ۱۲.

Table 3- Optimal value of realistic statistical-economic design parameters of the $\bar{X}$ control chart in the presence of independent attributable causes under the Ber12 shock model.

EA	arl_1	arl_0	P(I)	L	h	n	s	c	EA	arl_1	arl_0	P(I)	L	h	n	p0	PD	s	c
403.521	1.11	259.42	0.94	2.89	143	9	50	4.79	344.736	1.11	248.9	0.995	2.9	30.7	9	0	HN	100	5.5
403.521	1.11	259.42	0.94	2.89	143	9			344.736	1.11	248.92	0.995	2.9	30.7	9	0.85			
403.521	1.11	259.42	0.94	2.89	143	9			344.736	1.11	248.92	0.995	2.9	30.7	9	0.9			
405.571	1.10	200.126	0.95	2.807	13.542	9			344.736	1.11	248.92	0.995	2.9	30.7	9	0.95			
721.996	1.10	201.29	0.99	2.809	9.617	9			344.736	1.11	248.92	0.995	2.9	30.7	9	0.99			
407.626	1.11	206.435	0.936	2.817	14.091	9			351.39	1.11	350.05	0.958	2.983	30.7	10	0	NE		
407.626	1.11	206.435	0.936	2.817	14.091	9			351.39	1.11	350.05	0.958	2.983	30.7	10	0.85			
407.626	1.11	206.435	0.936	2.817	14.091	9			351.39	1.11	350.05	0.958	2.983	30.7	10	0.9			
416.656	1.9	201.861	0.95	2.81	13.539	10			351.39	1.11	350.05	0.958	2.983	30.7	10	0.95			
751.638	1.9	201.176	0.99	2.809	9.624	10			485.404	1.9	202.243	0.99	2.811	23.81	10	0.99			
407.597	1.11	221.107	0.95	2.839	13.305	7	50	4.79	347.544	1.11	207.708	0.966	2.819	29.409	7	0	UN	100	5.5
407.597	1.11	221.107	0.95	2.839	13.305	7			347.544	1.11	207.708	0.966	2.819	29.409	7	0.85			
407.597	1.11	221.107	0.95	2.839	13.305	7			347.544	1.11	207.708	0.966	2.819	29.409	7	0.9			
415.93	1.9	306.247	0.95	2.942	13.412	8			347.544	1.11	207.708	0.966	2.819	29.409	7	0.95			
686.39	1.9	201.213	0.99	2.809	9.615	8			455.198	1.9	200.373	0.99	2.808	23.787	8	0.99			
380.405	1.11	251.826	0.955	2.88	19.143	9	83.55	4.33	362.56	1.11	261.266	0.939	2.892	20.984	9	0	HN	50	7
380.405	1.11	251.826	0.955	2.88	19.143	9			362.56	1.11	261.266	0.939	2.892	20.984	9	0.85			
380.405	1.11	251.826	0.955	2.88	19.143	9			362.56	1.11	261.266	0.939	2.892	20.984	9	0.9			
380.405	1.11	251.826	0.955	2.88	19.143	9			364.475	1.10	206.351	0.95	2.817	20.445	9	0.95			
573.148	1.10	201.173	0.99	2.809	13.488	9			614.476	1.10	201.85	0.99	2.81	16.183	9	0.99			
389.26	1.11	338.689	0.953	2.973	19.2	10			365.416	1.11	205.552	0.938	2.816	20.944	9	0	NE		
389.26	1.11	338.689	0.953	2.973	19.2	10			365.416	1.11	205.552	0.938	2.816	20.944	9	0.85			
389.26	1.11	338.689	0.953	2.973	19.2	10			365.416	1.11	205.552	0.938	2.816	20.944	9	0.9			
389.26	1.11	338.689	0.953	2.973	19.2	10			367.546	1.11	200.559	0.95	2.808	20.286	9	0.95			
594.84	1.9	200.145	0.99	2.807	13.501	10			636.743	1.9	201.256	0.99	2.809	16.191	10	0.99			

جدول ۳- ادامه.

Table 3- Continued.

EA	arl_1	arl_0	P(I)	L	h	n	s	c	EA	arl_1	arl_0	P(I)	L	h	n	p0	PD	s	c
383.741	1.11	211.035	0.962	2.824	18.131	7	83.55	4.33	366.019	1.11	221.797	0.949	2.84	20.255	7	0	UN	50	7
383.741	1.11	211.035	0.962	2.824	18.131	7			366.019	1.11	221.797	0.949	2.84	20.255	7	0.85			
383.741	1.11	211.035	0.962	2.824	18.131	7			366.019	1.11	221.797	0.949	2.84	20.255	7	0.9			
383.741	1.11	211.035	0.962	2.824	18.131	7			366.043	1.11	219.116	0.95	2.836	20.203	7	0.95			
550.09	1.09	200.34	0.99	2.808	13.479	8			586.262	1.09	203.777	0.99	2.813	16.178	8	0.99			
339.884	1.11	253.573	0.952	2.883	30.422	9	75	7	377.575	1.11	249.539	0.958	2.878	19.848	9	0	HN	100	4
339.884	1.11	253.573	0.952	2.883	30.422	9			377.575	1.11	249.539	0.958	2.878	19.848	9	0.85			
339.884	1.11	253.573	0.952	2.883	30.422	9			377.575	1.11	249.539	0.958	2.878	19.848	9	0.9			
339.884	1.11	253.573	0.952	2.883	30.422	9			377.575	1.11	249.539	0.958	2.878	19.848	9	0.95			
496.828	1.10	201.863	0.99	2.81	24.275	9			544.515	1.10	200.642	0.99	2.808	13.89	9	0.99			
346.343	1.10	334.617	0.95	2.969	30.481	10			386.249	1.11	348.564	0.956	2.981	19.907	10	0	NE		
346.343	1.10	334.617	0.95	2.969	30.481	10			386.249	1.11	348.564	0.956	2.981	19.907	10	0.85			
346.343	1.10	334.617	0.95	2.969	30.481	10			386.249	1.11	348.564	0.956	2.981	19.907	10	0.9			
346.343	1.109	334.617	0.95	2.969	30.481	10			386.249	1.11	348.564	0.956	2.981	19.907	10	0.95			
512.362	1.09	200.772	0.99	2.808	24.288	10			564.553	1.09	202.475	0.99	2.811	13.896	10	0.99			
342.789	1.11	212.942	0.959	2.827	29.393	7			387.953	1.10	387.988	0.963	3.014	18.966	8	0	UN		
342.789	1.11	212.942	0.959	2.827	29.393	7			387.953	1.10	387.988	0.963	3.014	18.966	8	0			
342.789	1.11	212.942	0.959	2.827	29.393	7			387.953	1.10	387.988	0.963	3.014	18.966	8	0			
342.789	1.11	212.942	0.959	2.827	29.393	7			387.953	1.10	387.988	0.963	3.014	18.966	8	0			
478.038	1.09	200.749	0.99	2.808	24.271	8			523.515	1.08	200.115	0.99	2.807	13.888	8	0.99			
368.146	1.11	254.477	0.946	2.884	21.044	9	60.42	5.88	325.184	1.11	249.278	0.959	2.877	39.613	9	0	HN	100	7
368.146	1.11	254.477	0.946	2.884	21.044	9			325.184	1.11	249.278	0.959	2.877	39.613	9	0.85			
368.146	1.11	254.477	0.946	2.884	21.044	9			325.184	1.11	249.278	0.959	2.877	39.613	9	0.9			
368.442	1.10	228.898	0.95	2.85	20.797	9			325.184	1.11	249.278	0.959	2.877	39.613	9	0.95			
592.13	1.10	204.298	0.99	2.814	15.771	9			434.185	1.105	200.858	0.99	2.808	32.368	9	0.99			
376.323	1.10	310.916	0.944	2.946	21.081	10			330.737	1.11	349.419	0.957	2.982	39.673	10	0	NE		
376.323	1.10	310.916	0.944	2.946	21.081	10			330.737	1.11	349.419	0.957	2.982	39.673	10	0.85			

جدول ۳- ادامه.

Table 3- Continued.

EA	arl_1	arl_0	P(I)	L	h	n	s	c	EA	arl_1	arl_0	P(I)	L	h	n	p0	PD	s	c
376.323	1.10	310.916	0.944	2.946	21.081	10	60.42	5.88	330.737	1.11	349.419	0.957	2.982	39.673	10	0.9	NE	100	7
371.263	1.11	200.55	0.95	2.808	20.64	10			330.737	1.11	349.419	0.957	2.982	39.673	10	0.95			
613.327	1.09	201.203	0.99	2.809	15.783	10			446.199	1.093	200.109	0.99	2.807	32.386	10	0.99			
371.585	1.11	216.615	0.955	2.833	20.175	7			327.738	1.11	208.009	0.965	2.82	38.297	7	0	UN		
371.585	1.11	216.615	0.955	2.833	20.175	7			327.738	1.11	208.009	0.965	2.82	38.297	7	0.85			
371.585	1.11	216.615	0.955	2.833	20.175	7			327.738	1.11	208.009	0.965	2.82	38.297	7	0.9			
371.585	1.11	216.615	0.955	2.833	20.175	7			327.738	1.11	208.009	0.965	2.82	38.297	7	0.95			
565.497	1.09	200.062	0.99	2.807	15.774	8			420.759	1.09	202.543	0.99	2.811	32.359	8	0.99			
338.127	1.11	250.978	0.956	2.879	32.475	9	87.5	6.47	406.01	1.11	249.128	0.948	2.877	14.058	9	0	HN	66.84	4
338.127	1.11	250.978	0.956	2.879	32.475	9			406.01	1.11	249.128	0.948	2.877	14.058	9	0.85			
338.127	1.11	250.978	0.956	2.879	32.475	9			406.01	1.11	249.128	0.948	2.877	14.058	9	0.9			
338.127	1.11	250.978	0.956	2.879	32.475	9			406.117	1.11	246.607	0.95	2.874	13.906	9	0.95			
472.976	1.10	201.225	0.99	2.809	25.824	9			676.142	1.106	201.432	0.99	2.809	9.284	9	0.99			
344.432	1.11	342.103	0.954	2.976	32.529	10			416.552	1.108	333.781	0.946	2.968	14.081	10	0	NE		
344.432	1.11	342.103	0.954	2.976	32.529	10			416.552	1.108	333.781	0.946	2.968	14.081	10	0.85			
344.432	1.11	342.103	0.954	2.976	32.529	10			416.552	1.108	333.781	0.946	2.968	14.081	10	0.9			
344.432	1.11	342.103	0.954	2.976	32.529	10			416.862	1.098	244.311	0.95	2.871	13.917	10	0.95			
487.464	1.09	200.601	0.99	2.808	25.836	10			704.868	1.093	201.555	0.99	2.81	9.286	10	0.99			
340.93	1.11	209.861	0.963	2.823	31.293	7			409.816	1.11	215.638	0.956	2.831	13.23	7	0	UN		
340.93	1.11	209.861	0.963	2.823	31.293	7			409.816	1.11	215.638	0.956	2.831	13.23	7	0.85			
340.93	1.11	209.861	0.963	2.823	31.293	7			409.816	1.11	215.638	0.956	2.831	13.23	7	0.9			
340.93	1.11	209.861	0.963	2.823	31.293	7			409.816	1.11	215.638	0.956	2.831	13.23	7	0.95			
456.831	1.09	204.177	0.99	2.814	25.81	8			644.493	1.09	200.949	0.99	2.809	9.28	8	0.99			

منابع

[1] Shewhart, W. A. (1924). Some applications of statistical methods to the analysis of physical and engineering data. *Bell system technical journal*, *3*(1), 43–87. https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1924.tb01347.x

[2] Bowles, J. B. (2002). Commentary-caution: Constant failure-rate models may be hazardous to your design. *IEEE transactions on reliability*, *51*(3), 375–377. https://doi.org/10.1109/TR.2002.801850

[3] Banerjee, P. K., & Rahim, M. A. (1988). Economic design of x – control charts under weibull shock models. *Technometrics*, *30*(4), 407–414. https://doi.org/10.1080/00401706.1988.10488435

[4] Rahim, M. A., & Banerjee, P. K. (1993). A generalized model for the economic design of x̄control charts for production systems with increasing failure rate and early replacement. *Naval research logistics (NRL)*, *40*(6), 787–809. https://doi.org/10.1002/1520-6750(199310)40:6<787::AID-NAV3220400605>3.0.CO;2-4

[5] Saadatmelli, A., Moghadam, M. B., Seif, A., & Faraz, A. (2019). Economic design of $\bar{X}$ control charts with multiple assignable causes under Burr XII shock model. *Communications in statistics-theory and methods*, *48*(3), 500–522. https://doi.org/10.1080/03610926.2017.1414262

[6] Duncan, A. J. (1956). The economic design of X charts used to maintain current control of a process. *Journal of the american statistical association*, *51*(274), 228–242. https://doi.org/10.1080/01621459.1956.10501322

[7] Baker, K. R. (1971). Two process models in the economic design of an x chart. *AIIE transactions*, *3*(4), 257–263. https://doi.org/10.1080/05695557108974814

[8] Heikes, R. G., Montgomery, D. C., & Yeung, J. Y. H. (1974). Alternative process models in the economic design of t control charts. *AIIE transactions*, *6*(1), 55–61. https://doi.org/10.1080/05695557408974933

[9] Montgomery, D. C., & Heikes, R. G. (1976). Process failure mechanisms and optimal design of fraction defective control charts. *AIIE transactions*, *8*(4), 467–472. https://doi.org/10.1080/05695557608975110

[10] McWilliams, T. P. (1989). Economic control chart designs and the in-control time distribution: A sensitivity study. *Journal of quality technology*, *21*(2), 103–110. https://doi.org/10.1080/00224065.1989.11979152

[11] Chung, K. J. (1990). A simplified procedure for the economic design of $\bar{X}$ -charts. *International journal of production research*, *28*(7), 1239–1246. https://doi.org/10.1080/00207549008942790

[12] Montgomery, D. C. (1980). The economic design of control charts: A review and literature survey. *Journal of quality technology*, *12*(2), 75–87. https://doi.org/10.1080/00224065.1980.11980940

[13] Ho, C., & Case, K. E. (1994). Economic design of control charts: a literature review for 1981-1991. *Journal of quality technology*, *26*(1), 39–53. https://doi.org/10.1080/00224065.1994.11979497

[14] Woodall, W. H., & Montgomery, D. C. (1999). Research issues and ideas in statistical process control. *Journal of quality technology*, *31*(4), 376–386. https://doi.org/10.1080/00224065.1999.11979944

[15] Heydari, A. A., Moghadam, M. B., & Eskandari, F. (2016). Economic and economic statistical designs of X control charts under Burr XII shock model. *International journal of quality engineering and technology*, *6*(1–2), 1–15. https://doi.org/10.1504/IJQET.2016.081626

[16] Pasha, M. A., Moghadam, M. B., & Fani, S. (2017). A generalized approach to economic design of control charts: A discussion on implementing. *Communications in statistics - theory and methods*, *46*(21), 10495–10506. https://doi.org/10.1080/03610926.2016.1236963

[17] Wang, C. H., & Li, F. C. (2020). Economic design under gamma shock model of the control chart for sustainable operations. *Annals of operations research*, *290*(1–2), 169–190. https://doi.org/10.1007/s10479-018-2949-1

[18] Duncan, A. J. (1971). The economic design of (Equation presented)-charts when there is a multiplicity of assignable causes. *Journal of the american statistical association*, *66*(333), 107–121. https://doi.org/10.1080/01621459.1971.10482230

[19] Lorenzen, T. J., & Vance, L. C. (1986). The economic design of control charts: A unified approach. *Technometrics*, *28*(1), 3–10. https://doi.org/10.1080/00401706.1986.10488092

[20] Pasha, M. A., Bameni Moghadam, M., Nematollahi, N., & Fani, S. (2018). A generalized model for multiplicity-cause economic and economic statistical design of (formula presented.)-control charts with proportional hazards shock model. *Communications in statistics: simulation and computation*, *47*(6), 1866–1878. https://doi.org/10.1080/03610918.2017.1327071

[21] Chen, Y. S., & Yang, Y. M. (2002). Economic design of x̄-control charts with Weibull in-control times when there are multiple assignable causes. *International journal of production economics*, *77*(1), 17–23. https://doi.org/10.1016/S0925-5273(01)00196-7

[22] Shojaei, S. R., Bameni Moghadam, M., & Eskandari, F. (2022). Fundamental changes in theory of duncan's model for economic design of control charts in the presence of multiple assignable causes. *Iranian journal of science and technology, transaction a: science*, *46*(6), 1613–1628. https://doi.org/10.1007/s40995-022-01365-8

[23] Shojaei, R., & Bameni Moghadam, M. (2023). An extension of Yang and Rahim's model to determine design parameters in multivariate control charts under multiple assignable causes and Weibull Shock model. *Stochastics and quality control*, *38*(1), 25–46. https://doi.org/10.1515/eqc-2022-0053

[24] Ross, S. M. (1971). *Applied probability models with optimization applications*. Dover Publication. https://books.google.com.gi/books?id=ciU87-2kO1wC&printsec=copyright&source=gbs_pub_info_r#v=onepage&q&f=false